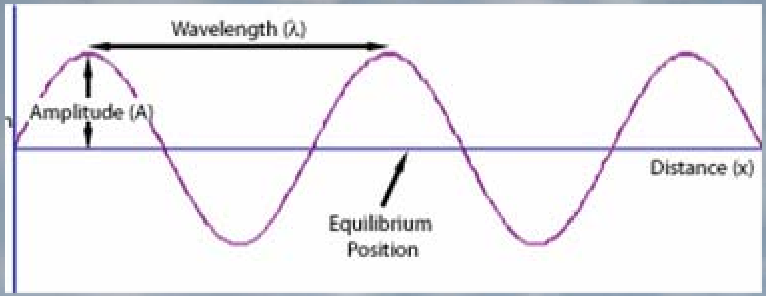
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

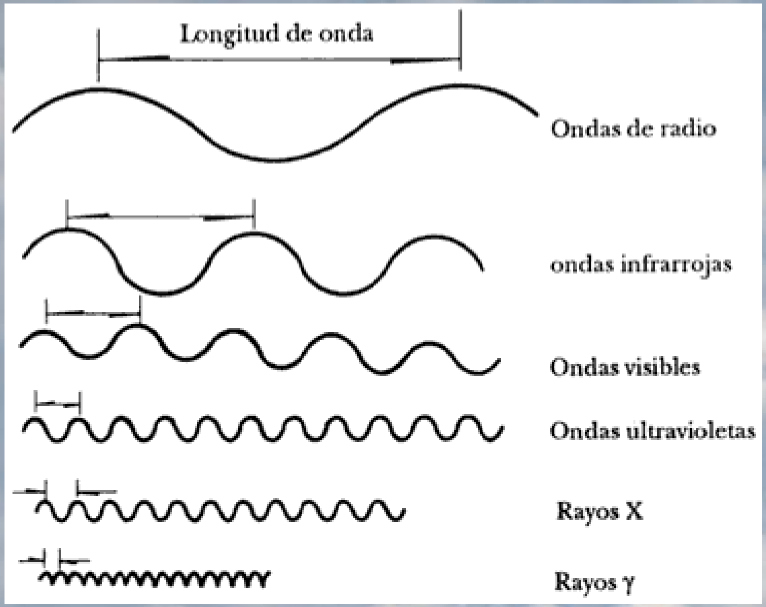
conento

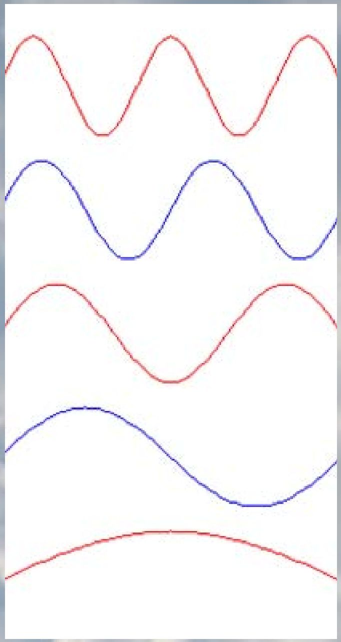
Música, ondas, calor…

María Jesús Vázquez Gallo

Formación Conento: junio 2008







Una **onda** es una **perturbación** de alguna propiedad de un medio, por ejemplo, densidad, presión, campo eléctrico o campo magnético, **que se propaga** a través del espacio transportando energía.

$$c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$$

Ecuación de ondas

olas, terremotos, sonido, etc.

ONDAS

Pitágoras explica las proporciones musicales (Fragmento de la *Escuela de Atenas*.Rafael.

Pitágoras (550 a.C.): ***¿relación entre la armonía musical y los números?***

Observó que las cuerdas que daban el tono, la cuarta, la quinta y la octava, tenían longitudes proporcionales a

12, 9, 8 y 6 (o a 1, 3/4, 2/3 y ½).

Pasando a frecuencias (inversas a las longitudes)

1, 4/3, 3/2 y 2

Ondulatoria

Sonido

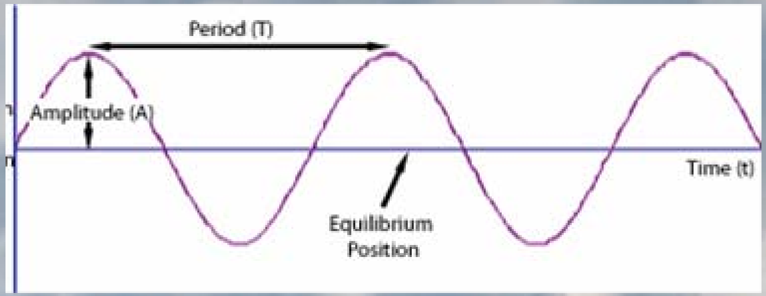
Cuerda vibrante

Galileo (S. XVI-XVII): El sonido de una cuerda puede ser representado por una onda con una frecuencia (f) determinada por la sección (S), la densidad (d), la longitud (L) y la tensión (T) de la cuerda.

$$\boxed{f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{dS}}}$$

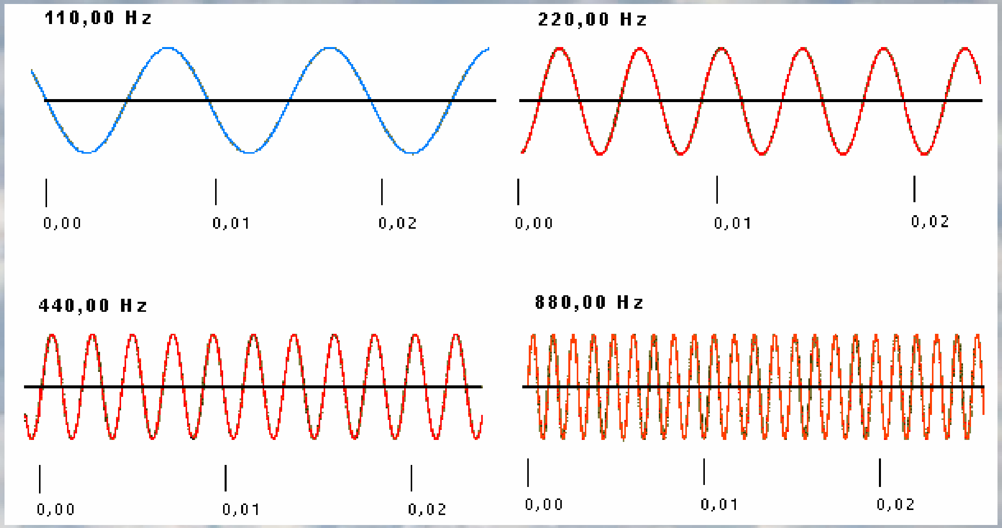
Sonido ←→ Onda

Sonido ←→ Onda

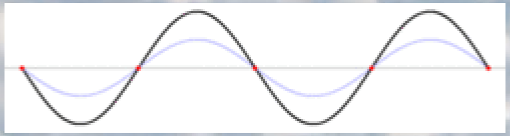


- intensidad ←→ amplitud
- tono ←→ frecuencia
- timbre ←→ ¿?

distintas frecuencias, igual amplitud

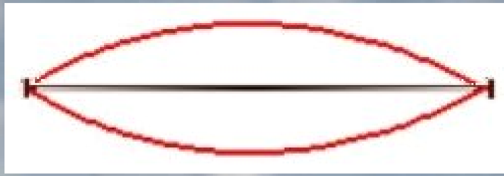


igual frecuencia,
distintas amplitudes

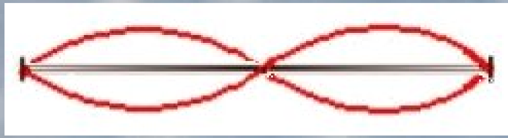


1 Hz = 1 ciclo/seg.
Frecuencia · Período = 1

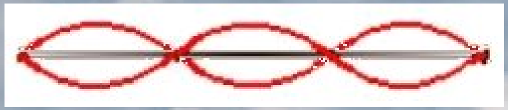
Cualquier cuerda puede vibrar de muchas formas diferentes.



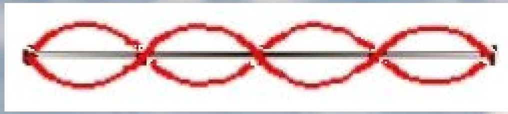
Frecuencia más fuerte *f*
Tono fundamental o raíz
Primer armónico



Frecuencia doble 2*f*
Segundo armónico



Frecuencia triple 3*f*
Tercer armónico



Frecuencia cuádruple 4*f*
Cuarto armónico

…

serie armónica

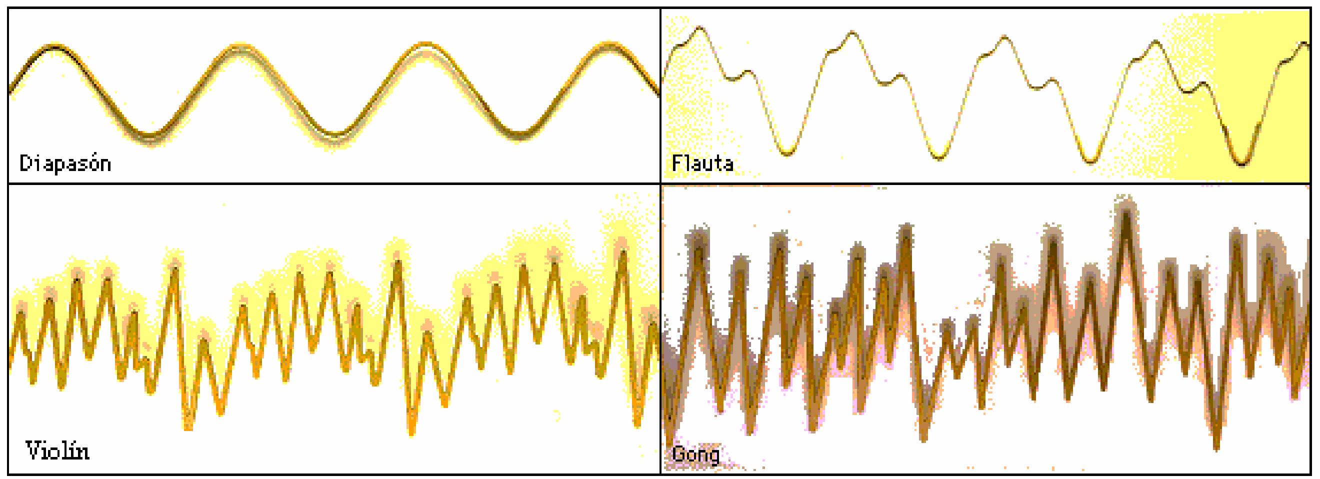
Dividiendo las frecuencias de un armónico con el anterior se obtienen los intervalos de la escala musical:

2/1 (octava) 3/2 (quinta) 4/3 (cuarta), 5/4 (tercera mayor)

y así sucesivamente. Es decir, una octava es el intervalo entre dos notas cuyas frecuencias tienen una relación de uno a dos.

Armonía musical: dos notas separadas por una octava producen una combinación eufónica (agradable) cuando suenan simultáneamente. Si el intervalo es de una quinta o de una cuarta, es progresivamente menos eufónica.

Si se toca el la situado sobre el do central en un diapasón, un violín y una flauta, con la misma intensidad en los tres casos, los sonidos son idénticos en frecuencia y amplitud, pero muy diferentes en timbre,



cello

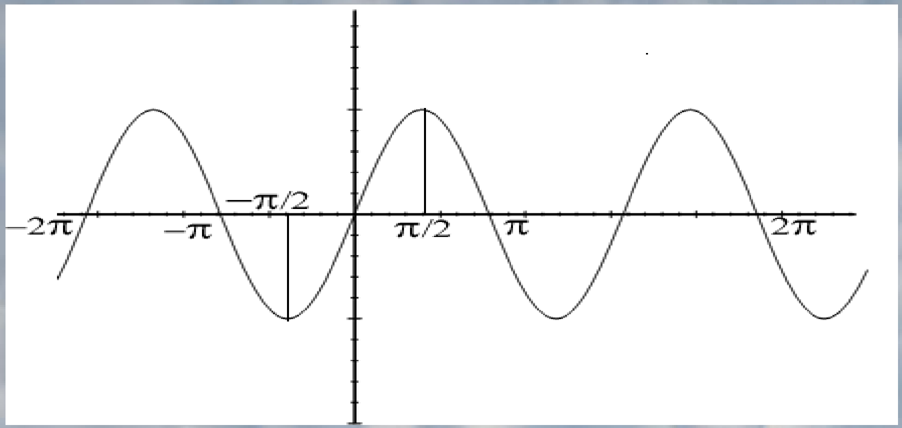
http://www.youtube.com/watch?v=LU_QR_FTt3E

El timbre del diapasón es el más sencillo, formado casi exclusivamente por vibraciones con frecuencias de 440 Hz. La componente principal de la nota producida por un violín también tiene una frecuencia de 440 Hz. Sin embargo, esas notas también contienen componentes con frecuencias que son múltiplos exactos de 440 Hz, los llamados tonos armónicos, como 880, 1.320 ó 1.760 Hz. Las intensidades concretas de esas otras componentes, los llamados armónicos, determinan el timbre de la nota.

timbre ←→ forma de la onda

Matemáticamente:

¿Funciones cuyas gráficas tienen aspecto de ondas? trigonométricas



Gráfica de la función seno. Período 2π

seno, coseno, tangente, …

desplazamiento diapasón

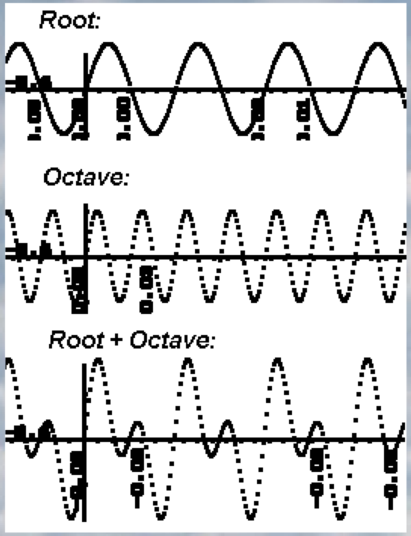
tiempo

$$f(x) = A sen\, \omega x$$

amplitud

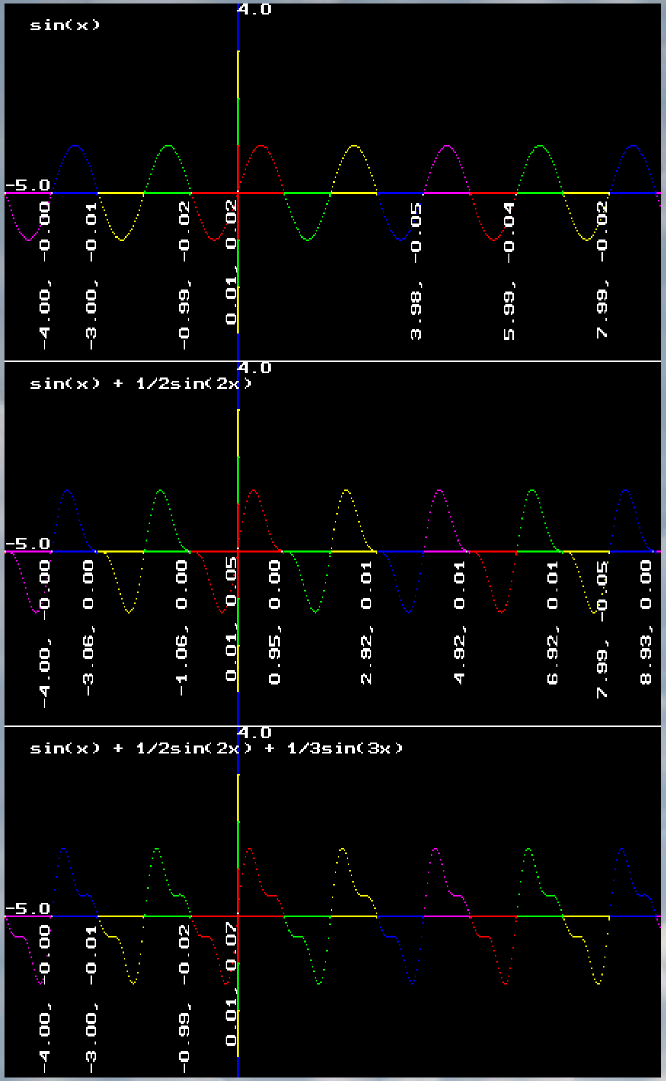
frecuencia

Recordando Proporciones:
Si el tono raíz de una cuerda corresponde a la frecuencia del seno t, la de su octavo corresponde al seno 2t (frec. doble)



Sonido: tono puro de frecuencia ω

ω = 440 ciclos por segundo



f(x)= sin(x) + ½ sin(2x) + 1/3 sin(3x)

periódica: período 2π.

sonido en general corresponde a gráfica de:

$$f(x) = A_1 sen(\omega x + \alpha_1) + \ldots + A_n sen(n\omega x + \alpha_n) +$$

periódica: período 2π/ω.

sonido (complicado) = suma de armónicos (sencillos)

Fenómenos periódicos: movimiento Tierra alrededor del Sol, corazón, señales, fuerzas que actúan sobre estructuras, etc.

¿Será posible representarlos como sumas de funciones sencillas de manera similar al sonido? ¿y si no son periódicos?

ANÁLISIS ARMÓNICO: SERIES DE FOURIER

SERIE… ¿de televisión?

Matemáticas: SERIE = SUMA de infinitos sumandos… ¡glub!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

¿cuánto te parece que suma esta serie?

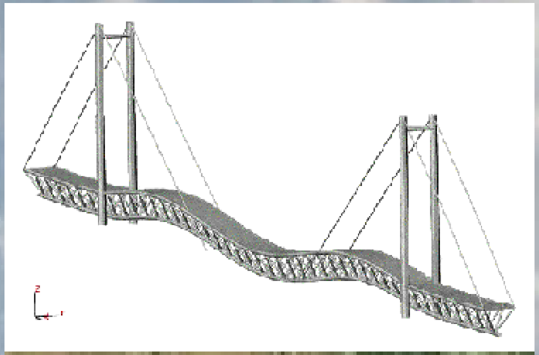
- Sonidos de la serie armónica ←→ sumandos de la serie de Fourier que representa la onda del sonido.

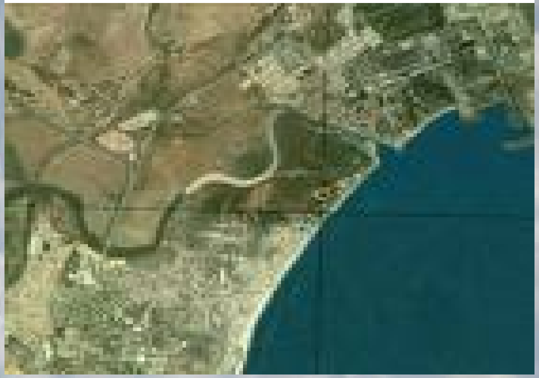
- “Receta" armónicos de un timbre ←→ lista ingredientes de un plato.

  Cualquier modificación en esta lista o en las proporciones de cada ingrediente, altera el "sabor", "color" o timbre del sonido.

¿Qué es la serie de Fourier de una función? Es una manera de ver la función (complicada) como suma infinita de senos y cosenos (sencillos) que se obtiene a partir de la función de manera especial.

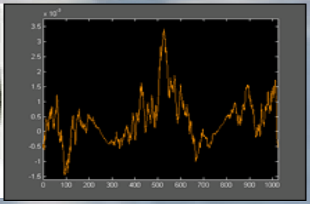
¿Para qué sirve? Para estudiar procesos de tipo oscilatorio, de difusión o de naturaleza periódica:





- en dinámica de estructuras, respuesta de estructuras a excitaciones;
- mejora de la calidad y análisis de imágenes en fotografía Aérea;
- predicción de mareas;
- física de plasmas, de semiconductores;
- análisis químicos;
- acústica;
- sismografía;
- imágenes médicas (escáner, TAC);
- estudio del ritmo cardíaco;
- y más…

¿Y las series temporales?



En procesamiento de señales, estadística y econometría, una **serie temporal** es una secuencia de datos, medidos típicamente a intervalos de tiempo sucesivos y espaciados (con frecuencia) de forma uniforme.

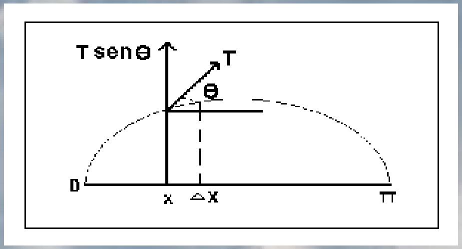
Análisis de series temporales busca extraer información representativa, orígenes o relaciones subyacentes a los datos.
Usos más habituales: predicción y pronóstico.
Por ejemplo: datos climáticos, cotizaciones bolsa, ventas.

Herramientas matemáticas:

- Consideración de la función de autocorrelación y la función de densidad espectral.
- Transformada de Fourier para investigar las series en el dominio de la frecuencia.
- Filtros para remover ruido no deseado.
- Análisis de los componentes principales.

¿Cómo surgieron?

Europa, siglo XVIII: “problema de la cuerda vibrante”:
Determinar el movimiento de una cuerda flexible tensa con extremos fijados cuando se tira de ella hasta que alcanza una posición y luego se suelta.



modelo:

- cuerda → trozo eje x, longitud π
- la forma que alcanza → f(x) dato
- movimiento en un plano → z(x,t) incógnita
  desplazamiento vertical del punto
  encima de x, tiempo t

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \\[2ex]
\dfrac{\partial z(x,0)}{\partial t} = 0 \\[2ex]
z(x,o) = f(x) \qquad z(0,t) = z(\pi,t) = 0
\end{cases}
$$

D’Alembert, Euler: método propagación de ondas

solución como superposición de dos ondas que se desplazan cada una en un sentido.

Daniel Bernouilli:

solución como superposición infinita de ondas sencillas

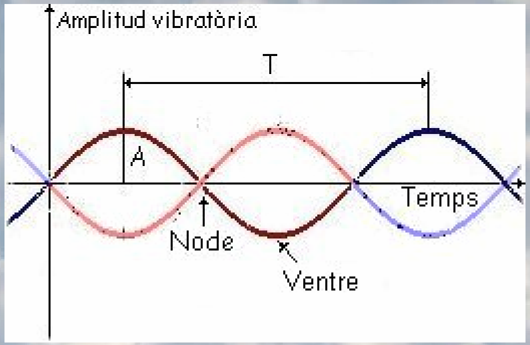
$$z_n(x,t) = sen(nx)\cos(nt)$$

n representa un número natural.

para cada tiempo t fijo, cos(nt) es un número → onda es múltiplo de sen(nx)

vibración correspondiente a la onda z_n → (n-1) nodos (cuerda fija)

¿cómo se le ocurrió? ¡música!



sonido que emite una cuerda → superposición
o suma de armónicos (tonos puros)
n=1 tono fundamental, n>1 sus armónicos

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)\cos(nt) \Rightarrow z(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$$

tiempo = 0

Joseph Fourier: barón, físico, matemático

Europa, siglo XIX: "teoría conducción del calor": Determinar la temperatura en cada punto de una varilla cuyos extremos están a cero grados, conocida la distribución de temperatura inicial.

modelo:

- varilla → trozo eje x, longitud π
- distribución inicial temperatura→ f(x) dato
- temperatura → z(x,t) incógnita
  temperatura en la sección x, tiempo t

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial z(x,t)}{\partial t} \\ z(x,o) = f(x) \\ z(0,t) = z(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Bernouilli → solución superposición infinita de soluciones sencillas

$$v_n(x,t) = \exp(-n^2 t) sen(nx)$$

solución

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) sen(nx) \quad \Rightarrow$$

tiempo = 0

$$z(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$$

El análisis espectral, basado que utiliza la Transfomada de Fourier para pasar del dominio de tiempo al dominio de frecuencias, puede ayudar a estudiar una serie temporal.

- determinando la estructura no aleatoria que subyazca en la serie
- detectando la existencia de tendencias y periodicidades estadísticamente significativas.

El análisis armónico comienza a aplicarse a una amplia variedad de fenómenos, desde la naturaleza de la luz o la estructura del átomo hasta los ordenadores, a la vez que impulsa investigación teórica en Matemáticas. En Física, la teoría de cuerdas, actualmente la mejor candidata para unificar las fuerzas fundamentales, se sirve de la analogía con las cuerdas vibrantes para definir su modelo físico del comportamiento de la materia.