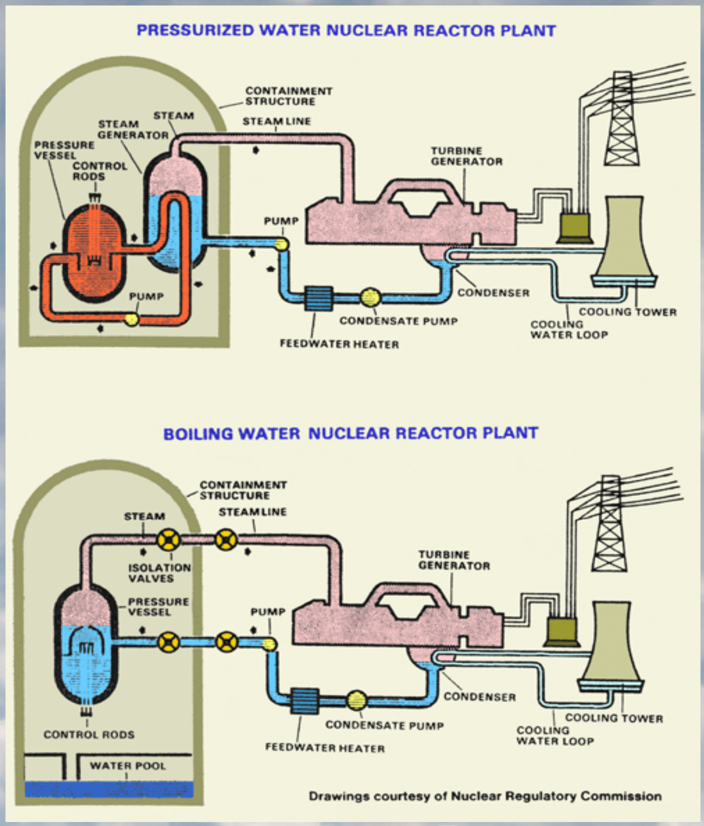
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Simulación: ¿nos vamos a Monte Carlo?

María Jesús Vázquez Gallo

Formación Conento: abril 2008



¿Qué tienen en común?

Simular procesos: Método de Monte Carlo

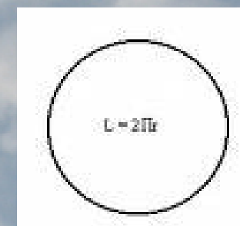
1. La aguja de Bufón.

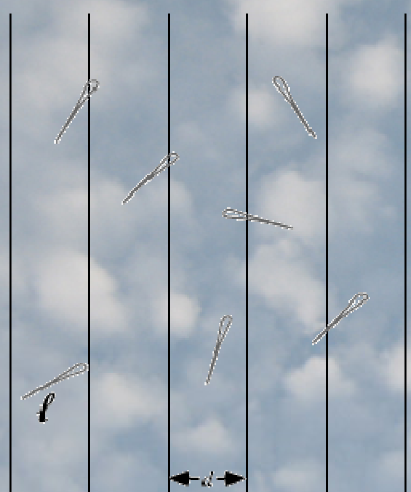
2. El azar. Números aleatorios.

3. Método de Montecarlo. Aplicaciones.

4. SABER MÁS.

S. XVIII: el naturalista francés Georges Louis de Buffon propuso un método para calcular el número π.





distancia entre rectas =d=l = longitud aguja

http://es.wikipedia.org/wiki/Aguja_de_Buffon

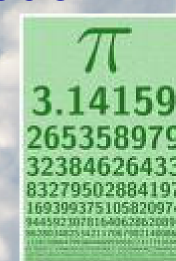
P = probabilidad (aguja cruce alguna línea)= 2/ π.

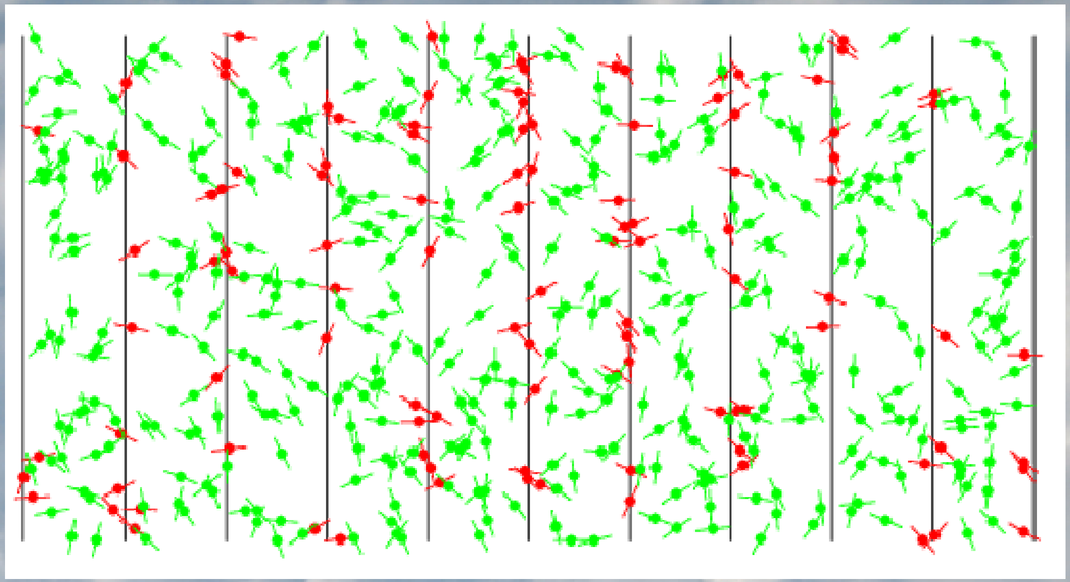
http://www.metablake.com/pi.swf

N tiradas: si la aguja cruza alguna línea A veces, esa probabilidad es A/N → π ~ 2*N*/*A*.

Idea: haciendo un gran número de lanzamientos al azar, se puede obtener un valor aproximado del número π.

Primer ejemplo del Método de Monte Carlo: buscar soluciones de un problema numérico a través de un muestreo artificial o simulación.





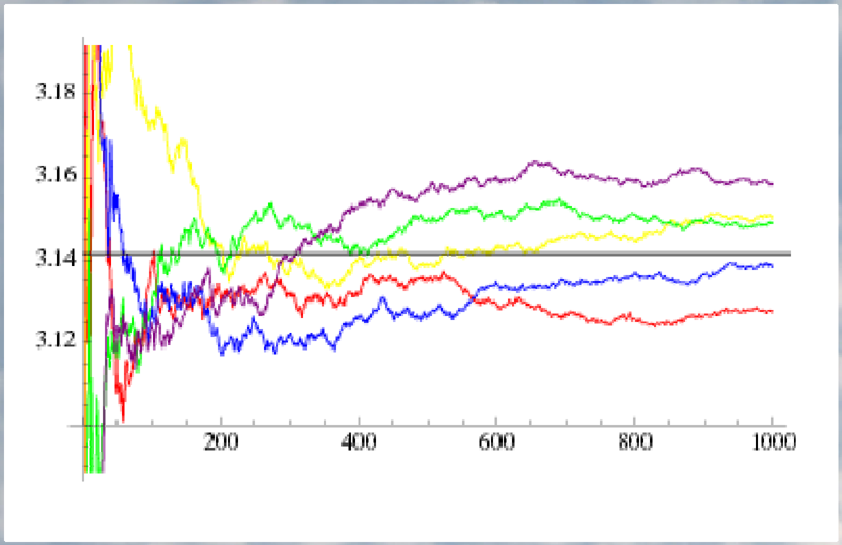
$l < d$

$\Downarrow$

$P = A/N = 2l / \pi d.$

N= 500, A=107, l/d = 1/3

$\pi \sim 2lN / dA \sim 3.116$



5 series de tiradas
N= 1000000, l/d = 1/3

Azar: **del árabe *zahr*, dado, literalmente 'flores'.**

Aleatorio: **del latín *aleatorĭus*, propio del juego de dados.**

¿Lo aleatorio interviene en nuestras vidas?
Si hoy es lunes, mañana es martes; si pago, puedo comprar; si bajo al andén pasará el metro, etc... Probabilidad 1. ¿La vida es determinista?

¿Y si cambia el tipo de calendario?... ¿Y si se produce un desabastecimiento?... ¿Y si hay huelga de conductores? Casi nunca sucede…
¿La vida es casi segura? Probabilidad cercana a 1.

¿Tu hijo nacerá en martes?... ¿Cuánto tardarás en la cola del hipermercado?... ¿A qué hora pasará el próximo metro hacia tu trabajo?... Estamos rodeados de fenómenos azarosos… La vida en general es aleatoria. Probabilidad variable.

¿cuál es la probabilidad de que tus acciones suban mañana en Bolsa más del 5%?

En muchos casos, es muy complicado calcular estas probabilidades explícitamente. Pero ¿y si simulamos estos fenómenos –muchas veces, con ordenador- y las aproximamos?

Eso es lo que hace el método de Monte Carlo y para ello se sirve de los números aleatorios.

¿Qué son?

¿El 5 será aleatorio?...

Si le pido a mis amigos un número al azar y voy teniendo: 2, 7, 4, 7, 5, 7, 3, 7,… ¿te parece una colección aleatoria?...

Una sucesión de números aleatorios es una sucesión de números seleccionados al azar pero de forma uniforme, es decir, todo número aparece con la misma probabilidad (aproximadamente la misma cantidad de veces).

¿para qué sirven?

Mirando la tabla inferior, imagina cómo usarla para simular:

1. Lanzamiento de una moneda. Distinguiendo pares e impares

2. Lanzamiento de un dado. Contando las veces que salen los dígitos del 1 al 6.

3. Lanzamiento de una moneda trucada (60% cara, 40% cruz). Distinguiendo los dígitos del 0 al 5 de los dígitos del 6 al 9

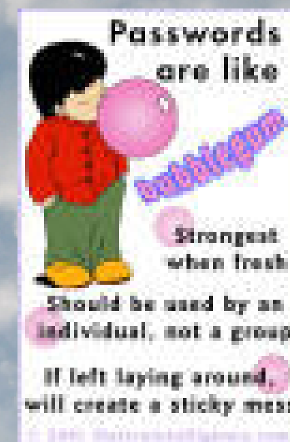
TABLA DE NÚMEROS ALEATORIOS

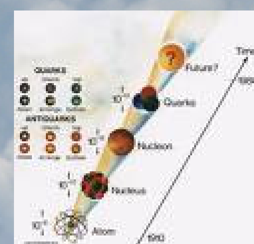
39634	**62349**	**74088**	**65564**	**16379**	**19713**	**39153**	**69459**	**17986**	**24537**
14595	**35050**	**40469**	**27478**	**44526**	**67331**	**93365**	**54526**	**22356**	**93208**
30734	**71571**	**83722**	**79712**	**25775**	**65178**	**07763**	**82928**	**31131**	**30196**
64628	**89126**	**91254**	**24090**	**25752**	**03091**	**39411**	**73146**	**06089**	**15630**
42831	**95113**	**43511**	**42082**	**15140**	**34733**	**68076**	**18292**	**69486**	**80468**
80583	**70361**	**41047**	**26792**	**78466**	**03395**	**17635**	**09697**	**82447**	**31405**
00209	**90404**	**99457**	**72570**	**42194**	**49043**	**24330**	**14939**	**09865**	**45906**

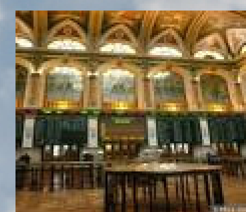
En general, se utilizan en:

1. Juegos de azar.
2. Animación por ordenador: caída de copos de nieve.
3. Asignación de claves secretas en criptografía.
4. Aplicaciones financieras.
5. Física de partículas.

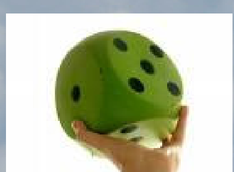
....







¿Cómo conseguirlos? **No es fácil.**



http://www.random.org/ ofrece números aleatorios obtenidos a partir del ruido atmosférico.

En algunas aplicaciones de simulación se utilizan números pseudoaleatorios.

Los números pseudoaleatorios se generan a partir de un número semilla, iterando alguna función matemática.

- John von Neumann, años 50: semilla de 10 cifras, elevar al cuadrado y seleccionar como nuevo número las cinco 5 centrales.
- LCG: generador de congruencias lineales $X_{n+1} = (aX_n + c) \mod m$
- L. Blum, M. Blum y M. Shub (1986) usado en criptografía.

x(i+1) = x(i)^2 + mod (p*q), con p y q primos congruentes con 3 módulo 4.

Recuerda

ARITMÉTICA DEL RELOJ: 10 + 6 = 4

16 = 4 porque su diferencia es 12;
19 = 7 porque su diferencia es 12;
26 = 2 porque su diferencia es 24, etc.

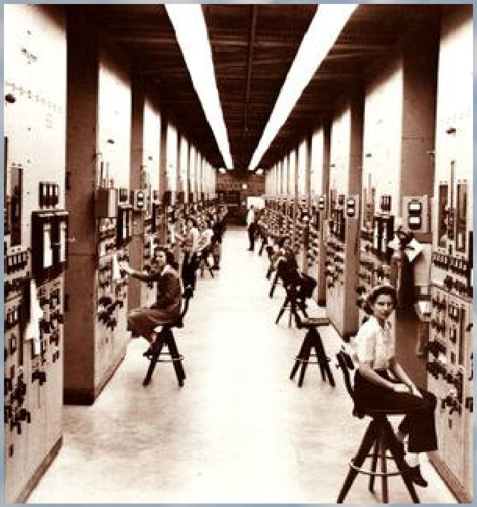
ARITMÉTICA MODULAR: reloj → módulo 12

→ Más fáciles de generar

→ Periódicos (predecibles)

El método de Monte Carlo fue bautizado así por su analogía con los juegos de ruleta de los casinos, siendo el más célebre el de Monte Carlo, inaugurado en 1861.

Resuelve una gran variedad de problemas haciendo experimentos con muestreos estadísticos en una computadora. Se analizan distribuciones de variables aleatorias usando simulación de números aleatorios.



Comenzó a usarse como herramienta de investiga ción en los años 40 en el Proyecto Manhattan relacionado con la primera bomba atómica.

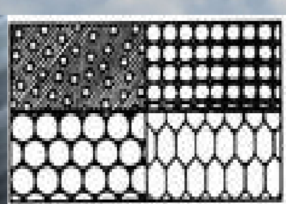
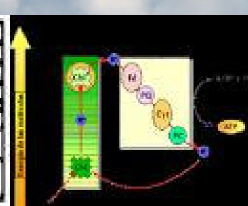
A veces Monte Carlo se usa para analizar problemas sin componente aleatorio explícito; un parámetro determinista del problema se expresa como una distribución aleatoria y se simula (agujas de Buffon).

El método de Monte Carlo convierte nuestro ordenador en un potente laboratorio de simulación.

Importancia actual del método Monte Carlo:

- Existen problemas numéricos de muy difícil solución por métodos exclusivamente analíticos.
- El desarrollo de los ordenadores posibilita la simulación de experimentos a través de números aleatorios o de números determinísticos pseudoaleatorios.
- Las aplicaciones posibles trascienden las propias Matemáticas:

Magnitud de las emisiones de rayos cósmicos; Tamaño crítico de los reactores nucleares; Difusión y movimiento browniano; Paso de líquidos a través de sólidos; Propiedades de retículos poliméricos; Características de los recipientes necesarios para el transporte de neutrones; Aplicaciones de la teoría de colas a problemas comerciales como almacenamiento, sustitución y mantenimiento de equipos, gestión de seguros, etc.

Ejemplo: el valor de un fondo de inversión es una variable aleatoria.

Queremos tener una idea de la volatilidad de un fondo antes de invertir. Usualmente se toman los precios diarios, se calculan los rendimientos diarios y en base a ellos la desviación típica.
La desviación típica (raíz cuadrada de la varianza) es un estimador de la volatilidad.

Al suponer que la volatilidad histórica es una buena estimación de la volatilidad futura estaremos confundiendo estimador con predictor.

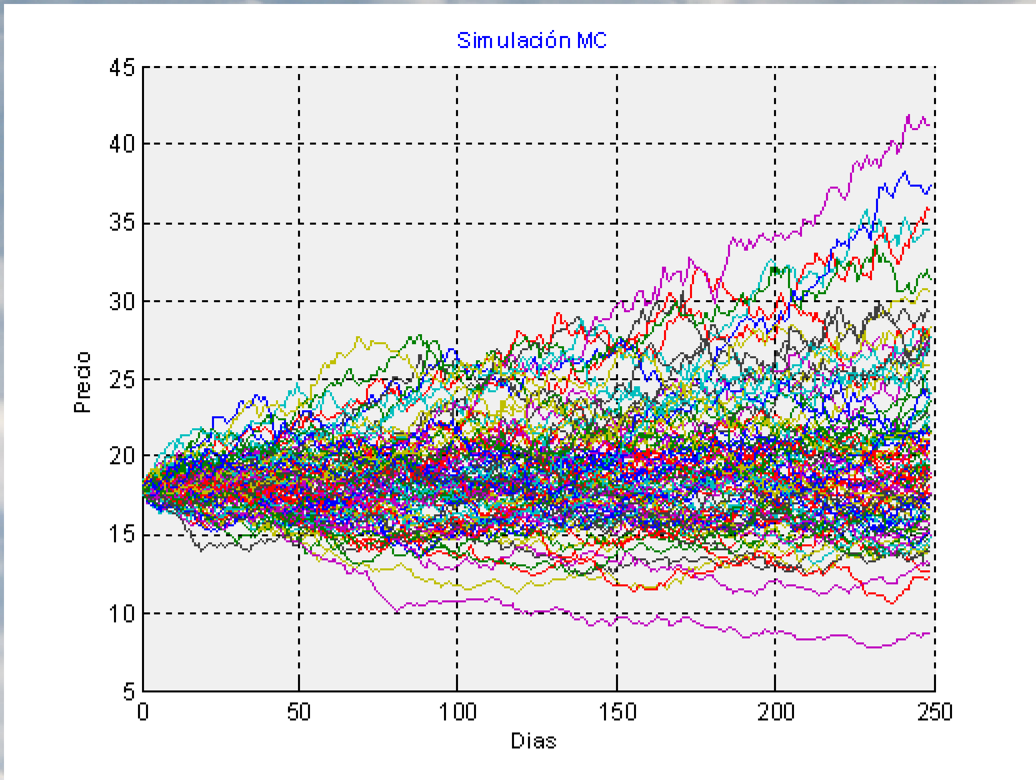
Supongamos que decidimos realizar la inversión porque estimamos que tenía una rentabilidad esperada del 10% y volatilidad 25%.

Supongamos que disponemos de un histórico con la evolución de los precios.

¿Cómo aplicar el método de Montecarlo?

Simulamos 100 trayectorias de evolución utilizando Monte Carlo.
Supongamos que el precio actual es de 18 €.
Cada línea representa una posible trayectoria del activo a partir de los 18 €.

Algunas suben a 40 €.
Otras bajan a 8 €.
Podemos perder hasta 10 € por acción.
La decisión tomada quizá no fue buena.

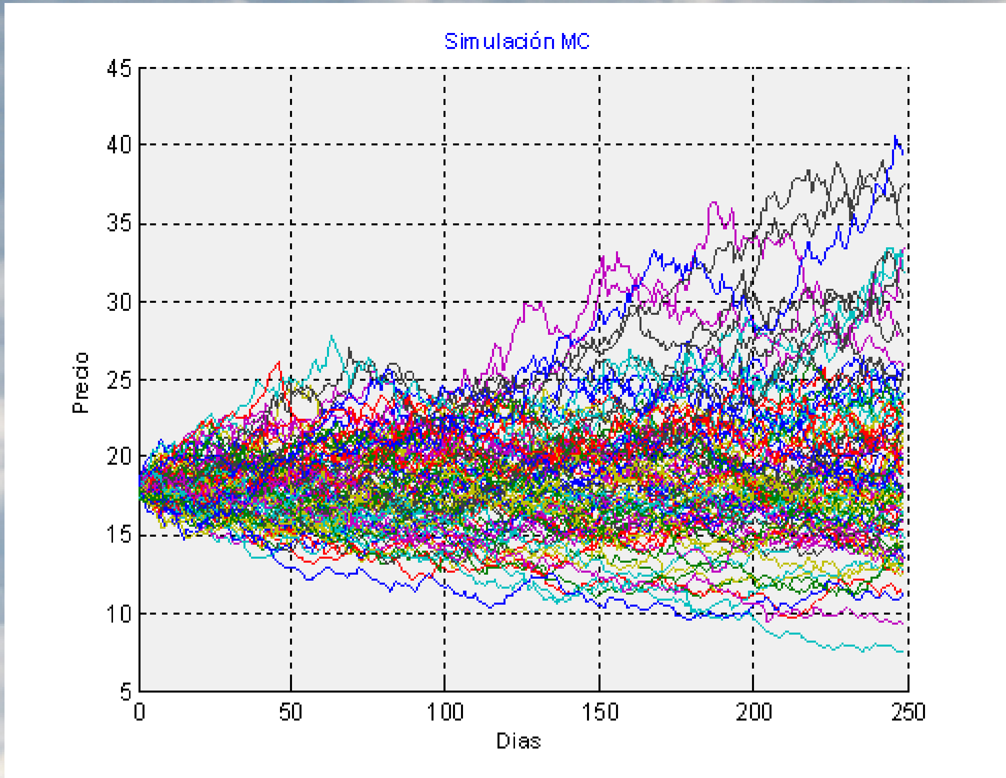


Usando variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas o empíricas podemos resolver muchos problemas relacionados con lo aleatorio y lo temporal.

Simulamos otras 100 trayectorias de evolución utilizando Monte Carlo, suponiendo que ahora la volatilidad es del 30%.

Podemos valorar el efecto del aumento en la volatilidad observando las posibles trayectorias y comparando con el caso anterior.

Otra ventaja: a partir de las trayectorias generadas se pueden calcular otros estadísticos complementarios que nos permitan decidir mejor.



Para las simulaciones anteriores se ha utilizado la ecuación diferencial:

$$dS = r \cdot S(t) \cdot dt + \sigma \cdot S(t) \cdot dWt$$

donde S(t) es el precio simulado, dS es el incremento del precio simulado; r es el tipo interés sin riesgo o deriva del proceso;
dt es el salto de tiempo al que se simula; σ es la volatilidad del activo.
dWt es un movimiento browniano o parte aleatoria del proceso.
En esta ecuación, un incremento del valor de S es igual a la suma de la tendencia más la variabilidad.
Con técnicas matemáticas, se obtiene la solución de la ecuación diferencial anterior:

$$S_T = S_0 \cdot e^{\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot T + \sigma \cdot \sqrt{T} \cdot N(0,1)\right\}}$$

Con esta solución ya podemos simular. La simulación de las trayectorias se puede realizar programando en Excel o Matlab.

Fuente: http://www.rankia.com